



Условия задач, ответы и критерии оценивания

1. Про зайчика (8 баллов)

Крюков П. А.

Геша измерял плотность маленького стеклянного зайчика. Он налил воду в мензурку с ценой деления 2 мл, при этом столб воды доходил до отметки 170 мл. После того, как Геша полностью погрузил зайчика на ниточке в воду, уровень воды поднялся до 180 мл. Далее Геша решил взвесить зайчика на школьных рычажных весах для лабораторных работ. Но гири у него были только массой 2 г. Получилось, что 12 гирь мало, чтобы уравновесить зайчика, а 13 — много. Не долго думая, Геша вычислил плотность зайчика:

$$\rho = \frac{25 \text{ г}}{180 \text{ мл} - 170 \text{ мл}} = 2500 \text{ кг/м}^3.$$

Пришёл Лёлик, назвал Гешу неумным человеком и сказал, что на самом деле значение плотности зайчика может сильно отличаться от значения, вычисленного Гешей. Известно, что Лёлик оценивает погрешность измерения объёма мензуркой в половину цены деления. Чему может быть равна плотность зайчика?

Ответ: $2000 \text{ кг/м}^3 < \rho < 3250 \text{ кг/м}^3$.

Критерии

- 1) Указано, что значение плотности лежит в некотором интервале — 2 балла.
- 2) Получено значение $\rho_{\min} = 2000 \text{ кг/м}^3$ для нижней границы интервала — 3 балла. Рассуждения верные, но допущена ошибка при вычислениях или алгебраических преобразованиях — 1,5 балла.
- 3) Получено значение $\rho_{\max} = 3250 \text{ кг/м}^3$ для верхней границы интервала — 3 балла. Рассуждения верные, но допущена ошибка при вычислениях или алгебраических преобразованиях — 1,5 балла.

2. Переходы (10 баллов)

Крюков П. А.

Дядя Вова живёт в области, а работает в Москве, до которой едет на электричке. Путь от железнодорожной платформы до места работы составляет 400 метров. На этом пути дядя Вова преодолевает два пешеходных перехо-

да длиной 20 метров, которые разделяет сорокаметровая маленькая площадь. Светофор на каждом переходе включает зелёный сигнал на 25 секунд, а красный — на две минуты. Дядя Вова ходит не спеша, со скоростью не более 1 м/с. Обозначим t_1 — минимальное время, за которое дядя Вова может дойти от вокзала до работы, а t_2 — минимальное время на обратную дорогу. Интервал времени между включением зелёного сигнала на первом светофоре на пути от вокзала и включением зелёного сигнала на втором обозначим T . Дядя Вова соблюдает правила, поэтому он выходит на «зебру» перехода только в том случае, если до окончания зелёного сигнала светофора остаётся 20 секунд и более. В противном случае он дорогу не переходит.

1) Пусть время T равно 60 с. Найдите время t_1 и время t_2 .

2) Чему равно время T , если $t_1 = t_2$?

Ответ: 1) $t_1 = 400 \text{ с}$ и $t_2 = 420 \text{ с}$; 2) $T = 0$, $T = 72,5 \text{ с}$.

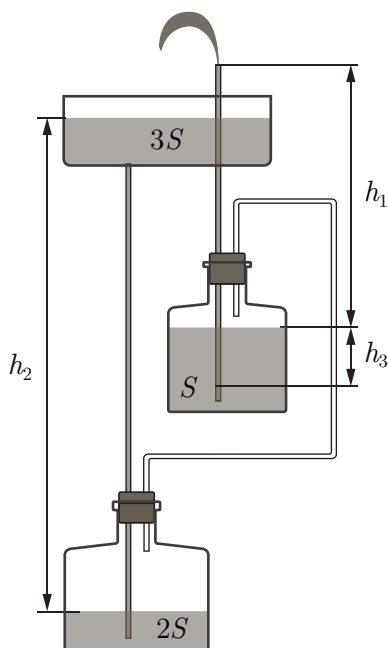
Критерии

- 1) Верно найдено значение времени $t_1 = 400 \text{ с}$ — 1 балла.
- 2) Верно найдено значение времени $t_2 = 420 \text{ с}$ — 3 балла.
- 3) Получено правильное значение времени $T = 72,5 \text{ с}$ — 2 балла.
- 4) Получено правильное значение времени $T = 0$ — 2 балла.
- 5) Произведён анализ возможных случаев и показано (как в решении или иначе, но доказательно и непротиворечиво), что других значений T быть не может — 2 балла.

3. Фонтан Герона (10 баллов)

Бычков А. И.

На рисунке ниже изображена схема «Фонтана Герона». Три сосуда с вертикальными стенками, площади оснований которых указаны на рисунке ($S = 100 \text{ см}^2$), соединены системой трубок с площадью сечения $S_1 = 10 \text{ мм}^2$. Суммарный объём воздуха в нижних сосудах остаётся при работе фонтана постоянным.



Вся вода, выходящая из верхней трубки и образующая фонтан, в итоге оказывается в верхнем сосуде. Квадрат скорости воды v на выходе из трубки определяется выражением

$$v^2 = \alpha(h_2 - h_1),$$

где α — неизвестный коэффициент пропорциональности, расстояния h_1 и h_2 показаны на рисунке. В процессе работы фонтана расстояния h_1 , h_2 и h_3 меняются.

1) Как изменяется уровень воды в верхнем сосуде в процессе работы фонтана?

В некоторый момент времени указанные на рисунке расстояния равны: $h_1 = 35$ см, $h_2 = 60$ см, а скорость воды, бьющей из трубочки, равна $v = 2,0$ м/с.

2) Найдите скорости изменения уровней воды в нижних сосудах в этот момент времени.

3) По истечении некоторого времени уровень воды в среднем сосуде опустится на величину $h_3 = 6$ см, при этом нижний сосуд еще не заполнится. Чему равна в этот момент скорость воды на выходе из трубки?

Ответ: 1) Уровень не изменяется; 2) 2 мм/с, 1 мм/с; 3) 1,6 м/с.

Критерии

1) Указано, что уровень воды в верхнем сосуде не меняется в процессе работы фонтана — 2 балла.

2) Записано соотношение между скоростями изменения уровней воды в нижних сосудах ($2u_2 = u_1$) — 2 балла.

3) Записано соотношение между скоростью изменения уровня воды в среднем сосуде и скоростью v ($u_1 \cdot S = v \cdot S_1$) — 2 балла.

4) Получены правильные числовые значения: $u_1 = 2$ мм/с и $u_2 = 1$ мм/с — 0,5 балла.

5) Найдено $\Delta h_{\text{нач}} = 25$ см — 0,5 балла.

6) Найдено $\Delta h_{\text{кон}} = 16$ см — 2 балла.

7) Найдено правильное числовое значение $v_{\text{кон}} = 1,6$ м/с — 1 балл.

4. Мокрый песок (12 баллов)

Черников Ю. А., Крюков П. А.

Строительный песок часто добывается со дна рек или карьеров. Такой песок содержит воду, что количественно характеризует *влажность* песка, равная

$$\varphi = \frac{m_{\text{вод}}}{m_{\text{п}}}.$$

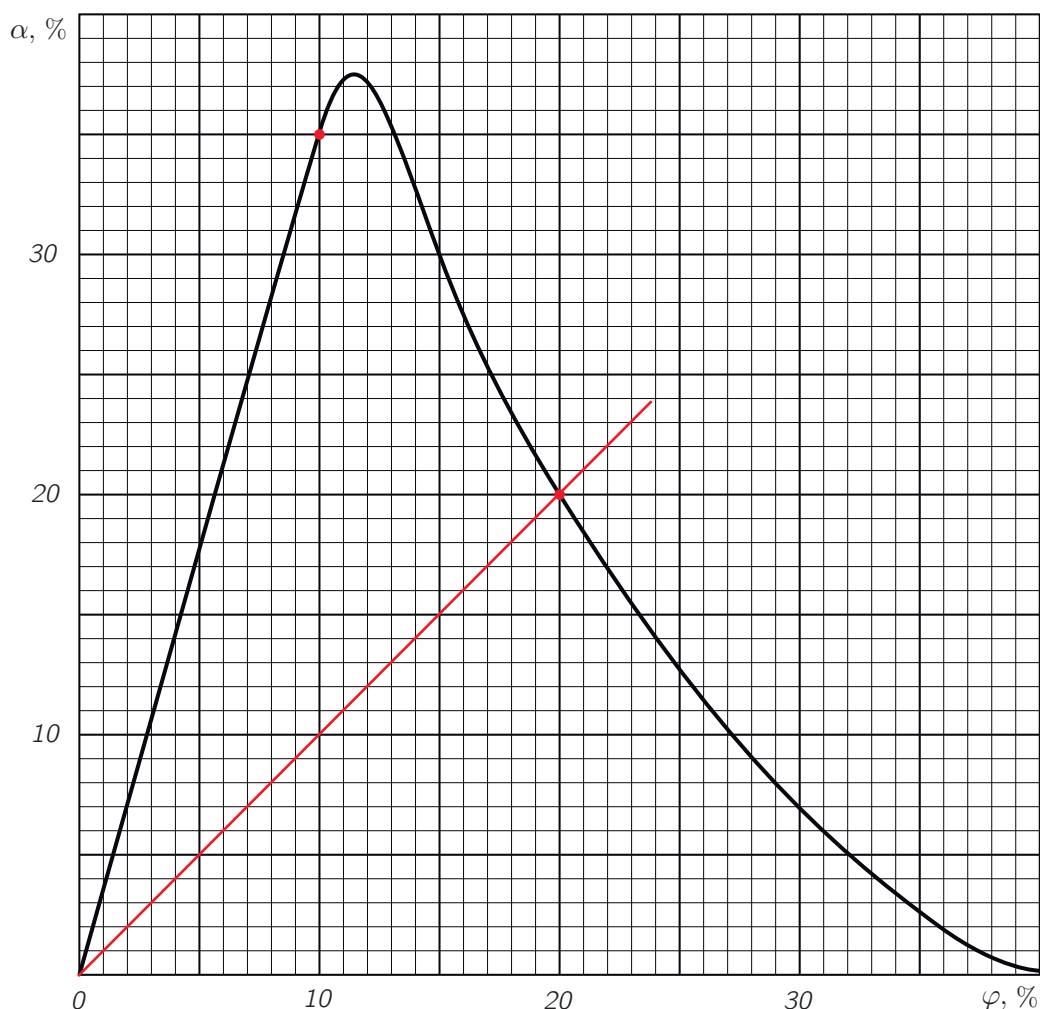
$m_{\text{вод}}$ — масса воды (в мокром песке), $m_{\text{п}}$ — масса песка без воды. Объём влажного песка $V_{\text{вл}}$ сильно зависит от его влажности. Обозначим

$$\alpha = \frac{V_{\text{вл}} - V_{\text{сух}}}{V_{\text{сух}}},$$

относительное изменение объёма песка при его увлажнении. Приближённый график зависимости $\alpha(\varphi)$ приведён на рисунке. Значения влажности песка и относительного изменения объёма выражены в процентах.

1) Определите значение влажности, при которой плотность влажного песка равна плотности сухого.

2) Объём порции влажного песка складывается из объёма песчинок, объёма воды и объёма воздушных полостей: $V_{\text{вл}} = V_{\text{п}} + V_{\text{вод}} + V_{\text{возд}}$. Когда небольшое количество воды попадает в песок вода обволакивает песчинки за счёт капиллярных сил и отдаляет их друг от друга. Предположим, что объём воды в песке и объём воздушных полостей связаны соотношением $V_{\text{возд}} = k \cdot V_{\text{вод}} + V_{\text{возд}}^{(0)}$, $V_{\text{возд}}^{(0)}$ — объём воздушных полостей при нулевой влажности. Можно ли считать коэффициент пропорциональности k постоянным на всем возрастающем прямолинейном участке графика? Найдите значение коэффициента k в середине этого участка графика. Плотность сухого песка $\rho_{\text{сух}}$ в 1,6 раз больше плотности воды $\rho_{\text{вод}}$.



Критерии

1) Получена зависимость $\alpha(\varphi)$, содержащая в виде параметра отношение плотностей сухого и влажного песка, как в решении:

$$\alpha = (1 + \varphi) \frac{\rho_{\text{сух}}}{\rho_{\text{вл}}} - 1,$$

или записанная в другой форме аналогичная зависимость — 3 балла.

2) Указано, что искомая влажность соответствует точке пересечения графика $\alpha(\varphi)$ и прямой $\alpha = \varphi$ и найдено верное значение влажности $\varphi = 20\%$ — 2 балла.

Если верное значение влажности найдено не так как в решении (без вывода зависимости $\alpha(\varphi)$), а по другому, при этом приводятся доказательные и непротиворечивые рассуждения — 5 баллов. Если рассуждения верные, но есть ошибки в алгебраических преобразованиях — 2,5 балла

3) Указано, что на прямолинейном участке графика выполняется соотношение $\alpha = 3,5\varphi$ — 1 балл.

4) Показано, что в рамках описанной в условии модели α пропорционально φ и зависит от k линейно. Получено соотношение

$$\alpha = \varphi(k + 1) \frac{\rho_{\text{сух}}}{\rho_{\text{вод}}} = \varphi(k + 1) \cdot \frac{8}{5},$$

или аналогичное — 3 балла.

5) Доказано, что коэффициент k остаётся постоянным на всём прямолинейном участке и найдено его значение $k \approx 1,19$ — 3 = 2+1 балла.

Если коэффициент k найден верно, но отсутствует доказательство того факта, что он не меняется на прямолинейном участке за второй пункт ставится 3 балла.

Если ответ на вопрос во втором пункте получен каким-то другим способом, при этом ответ — правильный, вдобавок приводится доказательное, непротиворечивое обоснование — 7 баллов. Если рассуждения верные, но допущены ошибки при вычислениях или преобразованиях — 3,5 балла.